MA2 - Domácí úkol 12 - křivkový integrál .

1. Vypočítejte křivkový integrál

   a) $\int_K \frac{x}{y} ds$, kde K je oblouk paraboly $y^2 = x$, spojující body (1, 1) a (4, 2) .

   b) $\int_K z ds$, kde $K = \{X = (x, y, z);\ x = t\cos t, y = t\sin t, z = t,\ t \in [\,0, \sqrt{2}\,]\}$

   b) $\int_K 2xy\,dx + x^2\,dy$, kde křivka K je

      i) úsečka s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1);

      ii) oblouk paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1);

      iii) část grafu funkce $y = x^3$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1).

2. a) Definujte pojmy :

   i) potenciální vektorové pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$

   ii) potenciál vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$

   a formulujte nutnou podmínku a postačující podmínky pro potenciálnost vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^2$.

   b) Buď dána v $R^2 - \{[0,0]\}$ funkce $U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Najděte v $R^2 - \{[0,0]\}$ vektorové pole $\vec{f}$, jehož potenciálem je funkce U .

   c) Je dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y) = 4\left(x^3 - xy^2,\ y^3 - x^2 y\right)$.

   i) Dokažte, že toto pole je potenciální v celé rovině.

   ii) Vypočítejte potenciál pole $\vec{f}$.

   iii) Vypočítejte integrál $\int_K \left(x^3 - xy^2\right)dx + \left(y^3 - x^2 y\right)dy$,

   kde K je kladně orientovaná kružnice o středu v počátku a poloměru $r = 2$.

MA2 – dú 12 (2018/19)

1. Vypočítejte křivkový integrál

a) $\int_K \frac{x}{y}\,ds$, kde K : oblouk paraboly $y^2 = x$, spojující body $(1,1)$ a $(4,2)$

Parametrizace křivky K: „x je funkcí y", tedy je „vhodné"

K: $y = t$, $x = t^2$, $t \in \langle 1,2 \rangle$, tj.

K: $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $t \in \langle 1,2\rangle$; pak $\vec{r}\,'(t) = (2t, 1)$

a $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} = \sqrt{4t^2+1}$

Pak dle vzorce
$$\int_K f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$
$$\left(= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \right),$$

je-li parametrizace K : $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a,b \rangle$,

dostaneme zde:
$$\int_K \frac{x}{y}\,ds = \int_1^2 \frac{t^2}{t}\sqrt{4t^2+1}\,dt \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} 4t^2+1 = u \\ 8t\,dt = du \\ t=1 \to u=5 \\ t=2 \to u=17 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{8}\int_5^{17} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{8}\left[u^{3/2}\right]_5^{17} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right).$$

b) $\int_K z\,ds$, kde $K = \{[x,y,z];\ x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle\}$

Parametrizace K: $X = \vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$

$$\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1)$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{2 + t^2}$$

tedy

$$\int_K z\,ds = \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} 2+t^2 = u \\ 2t\,dt = du \\ t=0 \rightarrow u = 2 \\ u = \sqrt{2} \rightarrow u = 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^4 \sqrt{u}\,du =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left[u^{3/2}\right]_2^4 = \frac{1}{3}\left(8 - 2\sqrt{2}\right)$$

c) $\int_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2 dy$ (křivkový integrál vektoru, zde $\vec{f}(x,y) = (2xy, x^2)$),

kde $\vec{K}$ je

(i) $\vec{K}_1$ - úsečka s poč. bodem $(0,0)$ a koncovým bodem $(1,1)$:

$\vec{K}_1$: $x = t$, $y = t$, $t \in \langle 0,1\rangle$, tj. $\vec{r}(t) = (t,t)$, $t \in \langle 0,1\rangle$

$$\vec{r}\,'(t) = (1,1)$$

vzorec: $\int_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r} \left(= \int_{\vec{K}} f_1 dx + f_2 dy\right) = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$

$$\left(= \int_a^b f_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right) dt \Big),$$

kde $\vec{K}$: $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a,b\rangle$ $(\vec{r}(t) = (x(t), y(t)))$

tedy zde:

$$\int_{\vec{K}_1} 2xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 (2t^2 + t^2)\,dt = \int_0^1 3t^2dt = \left[t^3\right]_0^1 = 1$$

(ii) $\vec{K}_2$ – oblouk paraboly $y = x^2$, s poč. bodem $(0,0)$ a koncovým $(1,1)$:

$\vec{K}_2$: $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $\vec{r}\,'(t) = (1, 2t)$ a

$$\int_{\vec{K}_2} 2xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 (2t^3 + t^2 \cdot 2t)\,dt = \int_0^1 4t^3dt = \left[t^4\right]_0^1 = 1$$

(iii) $\vec{K}_3$ – část grafu fce $y = x^3$, s poč. bodem $(0,0)$ a koncovým $(1,1)$:

$\vec{K}_3$: $\vec{r}(t) = (t, t^3)$, $\vec{r}\,'(t) = (1, 3t^2)$, $t \in \langle 0,1\rangle$

$$\int_{\vec{K}_3} 2xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 (2t^4 + t^2 \cdot 3t^2)\,dt = \int_0^1 5t^4dt = \left[t^5\right]_0^1 = 1$$

<u>Poznámka</u>: To, že integrály $\int_{\vec{K}_i} 2xy\,dx + x^2dy$ „vyšly" stejné pro různé křivky $\vec{K}_i$, $i = 1,2,3$, spojující body $(0,0)$ a $(1,1)$, není náhoda, neboť pole $\vec{f} = (2xy, x^2)$ je potenciální (konzervativní, nevírové), neboť

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x$, tj. $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ v R^2, a R^2 je oblast jednoduše souvislá),

tedy, v R^2 integrál $\int_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2dy$ „nezávisí na cestě".

<u>Zkusme určit potenciál tohoto pole a ověřit vzorec:</u>
(na další straně, ověřování se)

je-li $\vec{f} = \nabla U$ v ω, $\vec{K} \subset \omega$, p.b. $\vec{K} = A$, k.b. $\vec{K} = B$,

pak $\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$;

Výpočet potenciálu $U(x,y)$ pole $\vec{f}(x,y) = (2xy, x^2)$ v R^2:

platí: $\nabla U = \vec{f}$ v R^2, tj. $\vec{f}(x,y) = (2xy, x^2)$, tj.

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad , \quad (2) \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2 \, ;$$

a odtud:

z (1) (integrací): $U(x,y) = \int 2xy \, dx = x^2 y + C(y)$ v R^2

(konstanta při integraci je konstanta vzhledem k „x", tj. může to být funkce „y")

a pak odtud $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2 + C'(y)$

a z (2) $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2$

$\Rightarrow C'(y) = 0$ v R^2, tj. $C(y) = K$, $K \in R$

a tedy $U(x,y) = x^2 y + K$, $K \in R$, $(x,y) \in R^2$

(to „K" nezáleží výpočet křivkového integrálu)

Pak tedy:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy \, dx + x^2 dy = U(1,1) - U(0,0) = 1 \quad \left(\text{„} \left[x^2 y \right]_{(0,0)}^{(1,1)} \right)$$

(což nám už vybralo vyšlo);

a i $\oint_{\vec{K}} 2xy\,dx + x^2 dy = 0$ pro každou uzavřenou křivku v rovině.

Zkouška pro kružnici o středu v $[0,0]$ a poloměru R:

$$\vec{k}: \quad \vec{r}(t) = (R\cos t,\ R\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$\vec{r}\,'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t)$$

Pak
$$\oint_{\vec{k}} 2xy\,dx + x^2 dy = \int_0^{2\pi} \left(2R^2 \cos t \sin t \cdot (-R\sin t) + R^2\cos^2 t \cdot \cos t \cdot R\right) dt$$
$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left(-2\cos t \sin^2 t + \cos^3(t)\right) dt = 0, \text{ neboť:}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t \, dt \underset{1VS}{=} \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{a}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 t \cdot \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\cos t = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t \, dt = 0$$

(2) a) (i) pole $\vec{f}$ je potenciální v oblasti $\omega \subset R^3 (R^2)$, když platí, že $\int_{\vec{k}} \vec{f}\, d\vec{r}$ v ω „nezávisí na cestě", nebo ekvivalentně,

$\oint_{\vec{k}} \vec{f}\, d\vec{r} = 0$ pro každou uzavřenou (netrivelnou) $\vec{k} \subset \omega$,

nebo (ekvivalentně) existuje skalární funkce $U : \omega \to R$, tak, že $\nabla U = \vec{f}$ v ω;

(ii) potenciál pole $\vec{f}$ v ω je právě ta funkce $U : \omega \to R$, pro kterou platí $\nabla U = \vec{f}$;

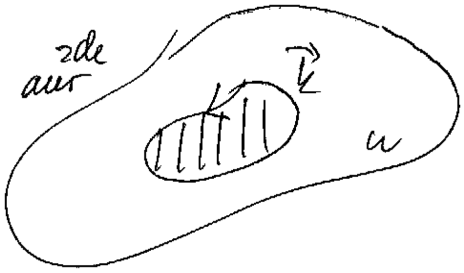
nutná podmínka potenciálnosti pole $\vec{f}$ v $\omega \subset R^2$:

je-li $\vec{f} = (f_1, f_2)$, pak, je-li $\vec{f}$ potenciální v ω, je $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$ v ω;

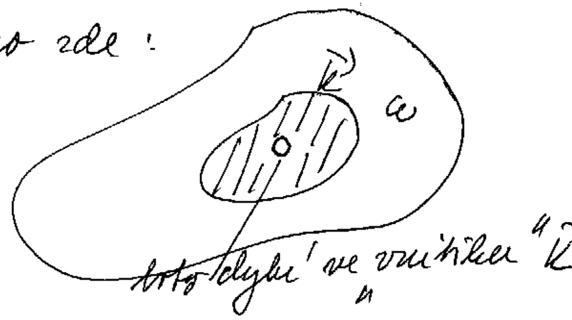
postačující podmínky potenciálnosti $\vec{f}$ v ω:

(např.) (i) $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$ v ω a také ∇ (důležité)

(ii) ω je jednoduše souvislá oblast v R^2, tj.: s každou uzavřenou křivkou v ω je v ω i celý vnitřek této křivky



není ale splněno zde:



b) $\underline{U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in R^2 \setminus \{[0,0]\};}$

$U(x,y)$ je potenciálem pole $\vec{f}(x,y) = \nabla U(x,y)$, tj.

$$\vec{f}(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}(2x, 2y), \text{ tj.}$$

$$\vec{f}(x,y) = -\frac{(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

(„centrální" vektorové pole je potenciální, i když $\omega = R^2 - \{[0,0]\}$ není jednoduše souvislá)

(tj. podmínka, že oblast ω je jednoduše souvislá (spolu s $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ v ω) je podmínka postačující, <u>ne nutná</u>!)

c) $\underline{\vec{f}(x,y) = 4\cdot(x^3 - xy^2,\ y^3 - x^2y)}$

(i) pole $\vec{f}(x,y)$ je potenciální v celé rovině R^2, protože

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -8xy = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \text{ v } R^2, \text{ a } R^2 \text{ je jednoduše souvislá};$$

(ii) $\underline{\text{potenciál pole } \vec{f} \text{ v } R^2}$:

platí ; $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 4(x^3 - xy^2)$, $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 - x^2y)$,

tedy: $U(x,y) = 4\int (x^3 - xy^2)\,dx = x^4 - 2x^2y^2 + c(y)$,

odtud $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -4x^2y + c'(y)$ a zároveň $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 4(y^3 - x^2y)$,

tedy, $c'(y) = 4y^3 \Rightarrow c(y) = y^4 + C$, $C \in R$;

a máme $\underline{U(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + C,\ (x,y) \in R^2,\ C \in R}$

(iii) pak (díky tomu, že $\vec{f}(x,y)$ je (zde) potenciální pole), je

$$\oint_{\vec{K}} (x^3 - xy^2)\,dx + (y^3 - x^2y)\,dy = 0 \quad \left(= \frac{1}{4}\oint_{\vec{K}} \vec{f}\cdot d\vec{r}\right)$$

$\underline{\text{a „nenáročné" i vypočtem}}$: $\vec{K}$: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; $x'(t) = -2\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\oint_{\vec{K}} (x^3 - xy^2)\,dx + (y^3 - x^2y)\,dy =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} \left[(\cos^3 t - \cos t \sin^2 t)\cdot(-\sin t) + (\sin^3 t - \cos^2 t \sin t)\cdot \cos t\right] dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} (2\cos^3 t(-\sin t) + 2\sin^3 t \cdot \cos t)\,dt \underset{\text{NVS}}{=} 16\left[\frac{\cos^4 t}{2} + \frac{\sin^4 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 .$$